Domácí úkol ze cvičení 7:

1. Dokažte aspoň jedno z tvrzení (z přednášky a ze cvičení):

   a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, $a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, $a<1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   a promyslete (a zkuste opět dokázat) :

   c) Je-li $a_n>0$, $n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a>1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

   d) Je-li $a_n>0$, $n\in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a>0$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. Pomocí tvrzení a) nebo b) z příkladu 1 si ukažte, jak snadno se dokáže, že

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x\in R$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n!} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a>1)$.

3. Užitím věty o limitě monotónní posloupnosti dokažte (znovu) :

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $q\in(-1,1)$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} = 0$;

4. Limita rekurentně zadané posloupnosti (užití věty o limitě monotónní posloupnosti):
   posloupnost $\{a_n\}$ definujeme rekurentně takto :

   (i) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$;

   nebo (ii) nebo (trošku těžší) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n = 1,2,\dots$.

   Rozhodněte (aspoň u jedné z daných posloupností), zda existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, a pokud ano, spočítejte ji.

   (!! Je třeba ukázat, že daná posloupnost konverguje – ukažte si na „výpočtu“ limity rekurentně dané posloupnosti $\{a_n\}$: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (-1)a_n$, jak to „dopadne“, pokud budete jen „počítat“ s tím, že posloupnost limitu má.)